Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe TB
1ère année

http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Programme de mathématiques TB1

Objectifs de formation

La place des Mathématiques dans la formation scientifique

L'objectif de l'enseignement des mathématiques en classe préparatoire TB est double.

Il contribue d'une part à l'approfondissement de la culture scientifique générale en donnant aux étudiants un accès à quelques domaines fondamentaux (algèbre linéaire, analyse, probabilités). La pratique du raisonnement mathématique concourt ici comme ailleurs à la formation de l'esprit d'un futur scientifique ; la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, le contrôle et l'analyse des hypothèses, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

D'autre part, il fournit des représentations et un langage dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà sont demandeuses ou utilisatrices. De là l'importance d'une cohérence et d'une coordination aussi bonnes que possible entre les diverses disciplines : il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambigüités dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

La finalité est de former des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques dans diverses situations issues du métier d'ingénieur.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les élèves des techniques classiques et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maitrise s'acquiert notamment grâce à des exercices variés. Le temps des travaux dirigés se prête également à l'expérimentation numérique, en lien avec l'enseignement d'informatique.

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés (TIPE).

Le développement des compétences

L'enseignement des mathématiques en filière TB vise au développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte souvent complexe.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants leur permet de gérer leurs apprentissages de manière responsable en repérant points forts et points faibles. Ces compétences prennent tout leur sens dans le cadre de la résolution de problèmes, de leur modélisation ou formalisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite.

De manière spécifique, on peut distinguer les compétences suivantes :

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies	Il s'agit d'analyser un problème, de se poser des questions, d'expérimenter sur des exemples, de formuler des conjectures.
Modéliser	C'est traduire un phénomène en langage mathématique, élaborer des concepts et des outils lors d'une phase d'abstraction ou de conceptualisation.
Représenter, changer de registre	Il s'agit de choisir le registre (numérique, algébrique, géométrique) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, et d'être capable de passer d'un registre à un autre, d'un mode de représentation (souvent visuelle : courbes, graphes, arborescences, tableaux) à un autre.
Raisonner et argumenter	Cela consiste à effectuer des inférences (inductives et déductives), à conduire une démonstration, à confirmer ou infirmer une conjecture, et enfin à évaluer la pertinence d'un concept au regard du problème posé.
Calculer, manipuler des symboles et maitriser le formalisme mathématique	C'est effectuer un calcul à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel), organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations et effectuer des simplifications, contrôler les résultats, mettre en œuvre des algorithmes, manipuler et exploiter des expressions symboliques, comprendre et utiliser le langage mathématique.
Communiquer à l'écrit et à l'oral	Il s'agit de comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, d'opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel, de rédiger une solution rigoureuse, de présenter et de défendre une production mathématique pour convaincre un interlocuteur ou un auditoire.

Mises en œuvre dans des situations et contextes spécifiques, les diverses compétences peuvent être déclinées en un certain nombre de capacités.

Première année

Préambule

Le programme de la filière TB se situe dans la continuité de ceux du lycée et des séries STL et STAV.

L'enseignement des mathématiques dans cette filière doit être principalement basé sur les applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela s'avère possible avec les enseignements de physique, de chimie, de biotechnologies et de biologie, tout en évitant les développements formels ou purement théoriques. Il importe de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemple, les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes biologiques, physiques ou chimiques. Ces interprétations, conjointement avec les interprétations géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire ou des probabilités. C'est pourquoi apparait parfois, dans la colonne de commentaires, le symbole $\rightleftharpoons$ pour signaler des possibilités d'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques.

La présentation de l'**algèbre linéaire** est faite par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Seule la présentation de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est envisagée.

Dans la partie du programme consacrée à l'**analyse**, le but est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et surtout sur les fonctions. L'analyse est un outil pour les probabilités et pour les autres sciences et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire, tout en évitant les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.

La partie relative aux **probabilités** vise à consolider et à développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste, initiée dès la classe de Troisième et poursuivie jusqu'en classe Terminale. L'accent est mis sur une prise en main élémentaire du langage de la théorie des ensembles, les techniques élémentaires de dénombrement et sur les espaces probabilisés finis. Tout ce qui concerne les variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs est infini est traité en seconde année.

Le programme est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent ; en revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier entre les chapitres ni même entre les paragraphes n'est imposé. L'ordre proposé dans le présent programme assure une bonne cohérence dans l'apparition des nouveaux concepts, mais il n'est pas le seul possible.

Enfin, les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Premier semestre

Outils et calculs

L'objectif de ce chapitre est de consolider et de compléter les acquis des classes antérieures afin que ces outils soient familiers aux étudiants.

Les ensembles **N**, **Z**, **R** sont supposés connus.

Contenus	**Commentaires**
a) Raisonnements	
Implication et équivalence. Raisonnements par récurrence et par l'absurde.	La familiarisation avec ces raisonnements est progressive et consolidée au fil des différents chapitres.
b) Calcul algébrique et numérique	
Calcul fractionnaire.	Il s'agit de consolider les acquis et d'exécuter un calcul littéral avec des fractions.
Intervalles.	On se limite à une simple description des différents types d'intervalles.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation de la valeur absolue en termes de distance. L'utilisation de l'inégalité triangulaire doit rester modeste.
Exposants (entiers), racine carrée.	On attend une maitrise des formules $(xy)^n = x^n y^n, x^{n+m} = x^n x^m, (x^n)^m = x^{nm}, \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert,\ \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y},\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$ $\rightleftharpoons$ Au cours du travail sur les puissances, on peut faire un lien avec quelques unités employées en physique, biologie ou biotechnologies et avec les analyses dimensionnelles correspondantes.

Contenus (suite)	Commentaires
Identités remarquables.	Les attendus se limitent aux formules suivantes dans **R** : $$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$ $$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
Développement et factorisation d'expressions algébriques. On montre des égalités et on manipule également des quotients simples.	
Manipulation des inégalités.	Il s'agit d'une simple reprise des règles de calcul algébrique sur les inégalités.
Résolutions d'équations et d'inéquations du premier degré.	Il s'agit d'une reprise de quelque sortes d'équations et inéquations abordées dans les classes antérieures.
Trinôme dans **R**. Discriminant et racines réelles. Signe du trinôme et inéquations du second degré.	La résolution doit se limiter à des cas simples. La forme canonique, la somme ou le produit de racines ne sont pas des attendus du programme.
c) Sommations	
Notation $\sum$.	On précise qu'une somme ayant un ensemble d'indices vide est nulle.
Règles de calcul.	Linéarité, découpage (ou relation de Chasles), changement d'indices par translation. L'introduction du symbole Σ doit être progressive.
d) Suites usuelles	
Suites constantes, suites arithmétiques, suites géométriques.	Savoir montrer qu'une suite est constante, arithmétique ou géométrique. Calcul du n-ième terme. La connaissance des suites arithmético-géométriques n'est pas un attendu du programme (on se contente de les inclure dans les exemples d'études de suites récurrentes).
Somme de termes consécutifs d'une progression géométrique : $$\sum_{0 \leq k \leq n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$	La raison q est dans $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.
Sommes des n premiers entiers et des n premiers carrés.	Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.
e) Factorielles et coefficients binomiaux	
Factorielle, notation $n!$.	
Coefficients binomiaux.	On adopte la définition suivante : $$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{sinon.} \end{cases}$$
Triangle de Pascal.	
Formule du binôme.	La démonstration n'est pas exigible. On met en valeur les formules : $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Trigonométrie

Cette partie a pour objectif d'élargir les notions de cos, sin vues au collège et de généraliser ces notions en définissant le cosinus, sinus et la tangente d'un réel, ces fonctions étant largement utilisées en physique. Cette partie est un prérequis pour l'étude des nombres complexes. Les fonctions cosinus, sinus et tangente seront ensuite ajoutées comme fonctions usuelles.

Contenus	**Commentaires**
Cercle trigonométrique. Définitions des cosinus, sinus et tangente d'un réel.	
Périodicité, symétries. Cosinus, sinus et tangente de $-x$, $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition et de duplication.	$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ $\cos(\alpha \pm \beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$ $\sin(\alpha \pm \beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$ $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$ $\quad =2\cos^2(\theta)-1=1-2\sin^2(\theta)$ $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$ Les autres formules de trigonométrie ne sont pas des attendus du programme. $\rightleftharpoons$ Transformation de l'expression $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$ en $r\cos(\theta+\varphi)$.

Nombres complexes

Les nombres complexes sont introduits en raison de leur importance dans plusieurs domaines des mathématiques ; dans ce programme, ils se présentent notamment à propos des équations du second degré et des valeurs propres de matrices (en seconde année).

On s'appuiera largement sur la notion de plan complexe et les images géométriques correspondantes. L'introduction des nombres complexes dans ce programme n'a cependant pas pour objectif la résolution de problèmes purement géométriques.

Contenus	**Commentaires**
a) Nombres complexes	
Représentation géométrique d'un nombre complexe ; nombres complexes conjugués ; affixe d'un point, d'un vecteur.	La construction théorique du corps des complexes est hors programme.
Résolution des équations du second degré à coefficients réels.	La résolution des équations du second degré à coefficients complexes est hors programme.
b) Module et argument d'un nombre complexe	
Définition du module d'un nombre complexe, module d'un produit, inégalité triangulaire.	Les illustrations géométriques ont pour seul objectif l'aide à l'acquisition de ces connaissances.
Nombres complexes de module 1 ; argument d'un nombre complexe non nul, notation $e^{i\theta}$.	L'argument d'un nombre complexe est mis en lien avec l'angle polaire d'un vecteur.
Relation $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}.e^{i\theta'}$, lien avec les formules de trigonométrie.	L'étude des racines n-ièmes d'un nombre complexe, y compris les racines n-ièmes de l'unité, est hors programme.
Formules d'Euler : $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.	

Algèbre linéaire 1 – Systèmes d'équations linéaires

En première année, on n'étudie que les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}$, où n est inférieur ou égal à 4, et des systèmes d'équations linéaires comportant au maximum quatre équations et quatre inconnues. Le cas particulier des systèmes à deux équations et deux inconnues, plus fréquemment rencontré dans d'autres disciplines, est mis en valeur et repris dans le chapitre suivant.

Contenus	Commentaires
Opérations élémentaires sur les lignes : elles transforment le système en un système équivalent.	Les opérations élémentaires sont : échanger deux équations, multiplier une équation par un scalaire non nul, ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres. $\rightleftharpoons$ Équilibrage de réactions chimiques (recherche de coefficients stœchiométriques).
Un système linéaire a zéro, une unique ou une infinité de solutions.	Ce fait peut être, à ce stade, suggéré par quelques exemples et sera justifié ultérieurement (méthode du pivot ou théorie du rang).
Réduction d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.	On définit à cette occasion le rang d'un système linéaire comme le nombre de pivots; on admet qu'il ne dépend pas de la manière de choisir les pivots.
Interprétations géométriques pertinentes pour un système linéaire à deux inconnues.	Dans le cas de deux inconnues, on interprète le système linéaire comme un problème d'intersection de droites affines. Aucune connaissance théorique sur ces questions n'est exigible.

Algèbre linéaire 2 – Matrices à coefficients dans C

Contenus	Commentaires
Matrices, matrices lignes, matrices colonnes. Matrice nulle.	
Opérations sur les matrices : addition, multiplication par un scalaire (réel), produit, transposition.	
Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires.	
Matrices carrées : matrice unité (ou identité), matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice inversible, matrice inverse.	En pratique, la recherche de l'inverse d'une matrice peut être effectuée par la résolution d'un système linéaire.
Inversibilité d'une matrice carrée 2×2 et expression de la matrice inverse lorsqu'elle existe. Application à l'existence et l'unicité de la solution d'un système linéaire $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ lorsque $ad-bc\neq 0$.	On introduit la notation $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ sans aucun développement théorique. Le déterminant des matrices de taille supérieure à 2 est hors-programme.
Le rang d'une matrice A est égal au rang du système $AX=0$.	On évitera toute théorie sur le rang.

Analyse 1 – Fonctions et applications

Le but de cette rubrique est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions numériques, illustrées par le recours à des fonctions tirées d'une gamme restreinte formée de fonctions « usuelles » (affines, homographiques ou polynomiales) qui interviennent fréquemment dans les applications. On privilégie une approche graphique avec pour but de développer le sens de l'observation et de l'utilisation des courbes représentatives.

Contenus	Commentaires
a) Généralités	
Notion générale de fonction d'un ensemble E dans un ensemble F.	On insistera sur la nécessité d'un concept général en envisageant des exemples variés issus de différents domaines.
Application, injection, surjection, bijection, application réciproque.	On fait remarquer que, dans le cadre des fonctions de **R** dans **R**, une bijection et sa réciproque ont des graphes symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

Contenus (suite)	Commentaires
Composition des fonctions.	On étudie quelques exemples fournis par des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ que l'on compose de diverses manières.
Image d'une partie.	La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.
b) Fonctions numériques	
Ensemble de définition.	Sauf dans les cas simples, la recherche de l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas un objectif du programme.
Combinaison linéaire, produit et quotient.	
Parité, imparité et périodicité.	On fait le lien avec les éléments de symétrie de la courbe représentative et on propose un domaine d'étude réduit selon les symétries et/ou les périodicités déterminées.
Monotonie.	
Fonctions minorées, majorées, bornées.	
Extremum, extremum local.	
Comparaison de fonctions numériques, positions relatives de courbes.	On peut étudier le signe de la différence, et notamment, consolider les outils d'encadrement.
c) Fonctions usuelles	Révision des acquis des classes antérieures. On met en valeur les courbes représentatives des fonctions de ce paragraphe.
Fonctions $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{Z}$), fonction racine carrée.	
Fonctions homographiques : définition, forme réduite, sens de variation.	$\rightleftharpoons$ Ces fonctions apparaissent, entre autres, en cinétique chimique et enzymatique. La mise sous forme réduite permet de trouver rapidement le sens de variation et (par la suite) les asymptotes, mais elle n'est pas en soi un attendu du programme.
Fonctions sinus, cosinus et tangente.	On met en valeur les courbes représentatives, parités et périodes de ces fonctions.
Fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$, propriétés algébriques. Fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$.	Parmi les fonctions $x \mapsto a^x$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est celle dont la courbe a une tangente en 0 de pente 1. $\rightleftharpoons$ Exemples de modèles exponentiels $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ issus des autres disciplines (la variable x est alors pourvue d'une unité de mesure et la constante λ a aussi une unité).
Fonctions logarithme népérien et logarithme décimal, conversion. Propriétés algébriques.	$\rightleftharpoons$ Usage des logarithmes décimaux en pH-métrie. $\rightleftharpoons$ Conversion de lois physiques ou chimiques, s'exprimant de manière multiplicative, en relations additives : migration de molécules en situation d'électrophorèse, évolution microbienne, loi d'action de masse, etc. On fait le lien entre les écritures a^x et $\mathrm{e}^{\lambda x}$.
Fonctions puissance $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbf{R}$.	
d) Fonctions polynomiales	
Les polynômes sont introduits à la fois comme outils de modélisation de phénomènes complexes et comme un domaine permettant un calcul de nature algébrique.	*On ne considère que des polynômes à coefficients réels. Les polynômes ne peuvent être le ressort principal d'une question posée au concours. Les polynômes sont exclusivement définis comme fonctions polynomiales de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$.
Monômes.	On fait apparaitre les polynômes comme combinaisons linéaires de monômes.

Contenus (suite)	Commentaires
Fonctions affines.	Révision des acquis des classes antérieures : droites affines, coefficient directeur (ou pente). ⇌ Révision et mise en pratique de la régression linéaire.
Polynômes du second degré, factorisation sur **R**.	⇌ Application en pH-métrie (acides forts, bases fortes).
Opérations algébriques et composition sur les fonctions polynômes.	
Une combinaison linéaire de monômes de degrés distincts ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls.	On montre que deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.
Degré, coefficients d'un polynôme. Polynôme unitaire.	
Polynôme dérivé.	On peut ici soit s'appuyer sur les acquis des classes antérieures, soit aborder la question de la dérivée de la fonction polynôme et des questions qui s'y rapportent dans le chapitre Analyse 2.
Racine simple et factorisation par $(x-a)$, racine multiple et factorisation par $(x-a)^2$.	On distingue le fait que a est racine simple ou multiple de P selon que $P'(a)$ est nul ou non; une approche graphique est recommandée. L'attendu concernant les racines se limite au cas où elles sont réelles. Le test sur les dérivées successives n'est pas au programme. L'ordre de multiplicité n'est pas au programme.

Analyse 2 – Études de fonctions

Le but de ce chapitre est de consolider et compléter les acquis des années antérieures concernant les calculs de limites et les règles de dérivation. Les résultats pourront être admis à ce stade, puis démontrés dans les chapitres Analyse 5 et Analyse 6.

Contenus	Commentaires
a) Calculs de limites	
Limite d'une fonction en un point, en $-\infty$, en $+\infty$.	À ce stade, on se contente d'une approche intuitive à partir d'illustrations numériques et graphiques, en lien avec ce qui a été fait au lycée.
Asymptotes parallèles aux axes.	La notion d'asymptote oblique n'est pas un attendu du programme.
Limites des fonctions usuelles au bord de leur ensemble de définition.	
Asymptotes des fonctions homographiques.	⇌ En sciences expérimentales, interprétation de la présence d'une asymptote sur le tracé d'une courbe.
Règles opératoires sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	On se contente de calculer des limites dans des cas simples.
b) Calculs de dérivées	
Nombre dérivé, dérivabilité en un point.	Notations : $f'(a)$ et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.
Équation de la tangente en un point. Tangente verticale.	
Fonction dérivée. Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composée.	Notations : f' et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. ⇌ On fait le lien avec diverses situations issues d'autres disciplines où l'on dérive par rapport au temps : vitesse d'un point mobile, vitesse de réaction, cinétique enzymatique...
Dérivabilité et fonctions dérivées des fonctions $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{Z}$), racine carrée, cos, sin, tan, exp, ln et $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$).	

Contenus (suite)	Commentaires
Définition de la dérivée seconde.	Cette définition prélude à l'étude des équations différentielles. On met en valeur les dérivées secondes des fonctions exp, sin et cos.
Signe de la dérivée et sens de variation. Tableau de variation.	On utilise l'interprétation graphique du nombre dérivé pour suggérer ce lien. On remarque que les fonctions constantes ont une dérivée nulle, et on admet la réciproque sur un intervalle. Les liens croisés entre tableaux de variation, tableaux de signes, tableaux de valeurs et courbes représentatives sont importants à développer.
c) Calculs des dérivées partielles d'une fonction de deux variables Dérivées partielles d'une fonction de deux variables.	On introduit les notations $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$. $\rightleftharpoons$ Le calcul des dérivées partielles est présenté en lien avec l'usage qui en est fait dans les autres disciplines : exemples de lois physiques s'exprimant avec des dérivées partielles premières (ou secondes, par extension) notamment en thermodynamique et à propos des gaz parfaits. Les règles de dérivation en chaîne ne sont pas au programme.
d) Calculs de primitives Définition d'une primitive d'une fonction sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Primitives des fonctions usuelles.	Primitives de $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^\alpha$, u'/u, $u'/\sqrt{u}$, $u'\sin u$ et $u'\cos u$.

Analyse 3 – Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Contenus	Commentaires
a) Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants Équations du type : $y' + ay = 0$ où a est un nombre réel. Équations du type : $y' + ay = f(t)$ où a est un réel et f est une fonction usuelle.	On résout ces équations sur un intervalle. On donnera la forme d'une solution particulière dont l'étudiant aura à ajuster les coefficients. $\rightleftharpoons$ Exemples issus de modèles relevant des sciences physiques, de la chimie et de la biologie : mouvement d'un point mobile, modèles d'évolution bactérienne, cinétique chimique et enzymatique.
b) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants Équations du type : $y'' + ay' + by = 0$ où a et b sont des nombres réels. Équations du type : $y'' + ay' + by = f(t)$ où a et b sont réels. et f une fonction usuelle.	On résout ces équations sur un intervalle. On donnera la forme d'une solution particulière dont l'étudiant aura à ajuster les coefficients. $\rightleftharpoons$ Le cas le plus fréquent dans les applications est celui d'un second membre de la forme $t \mapsto \sin(\omega t)$. On fournit à l'étudiant la forme d'une solution possible, du type $t \mapsto \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \lambda t \cos(\omega t)$, il reste alors à déterminer la valeur de λ et de μ.

Contenus (suite)	Commentaires
Principe de superposition.	⇌ Il s'agit de mettre en évidence la linéarité des « sorties » (la fonction y) par rapport aux « entrées » (la fonction f).

Probabilités 1 – Ensembles et dénombrement

Cette rubrique a pour but d'introduire le vocabulaire et les méthodes de base du dénombrement. Les différentes notions seront illustrées par des exemples issus des jeux, de la vie courante et des sciences. On évitera tout excès de formalisation dans les démonstrations.

Contenus	Commentaires
a) Vocabulaire de base	
Élément, appartenance, sous-ensemble ou partie. Inclusion, complémentaire. Intersection, réunion. Produit cartésien de n ensembles.	Ces notions, qui pourront avoir été abordées dans d'autres rubriques (par exemple lors des généralités sur les fonctions numériques), devront faire l'objet d'un développement modeste. Elles ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral.
b) Dénombrement	
Cardinal, notation card(E). Note : dans les définitions qui suivent, on suppose que card$(E) = n$.	On définit le cardinal grâce à la notion intuitive de nombre d'éléments.
Cardinal d'une union disjointe. Formule $\text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B$.	
Cardinal d'un produit cartésien.	
Un éléments de E^p est appelée une p-liste de E. Il y a n^p p-listes de E.	C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, avec d'éventuelles répétitions.
Une p-liste est dite sans répétition lorsque ses éléments sont distincts deux à deux. Il y a $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ p-listes sans répétition de E.	C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, sans répétition.
Une liste de E contenant exactement une fois chaque élément de E est appelée une permutation de E. Il y a $n!$ permutations de E.	C'est le nombre de façons de choisir successivement tous les objets d'un ensemble, sans répétition.
Si $p \leq \text{card}(E)$, une p-combinaison de E est une partie de E à p éléments. Il y a $\binom{n}{p}$ p-combinaisons de E.	C'est le nombre de façons de choisir simultanément p objets parmi n.
Cardinal de l'ensemble des parties de E.	
Formule du binôme.	On réinterprète la formule du binôme d'un point de vue combinatoire, et on constate que les coefficients binomiaux, vus dans le chapitre Outils et calculs, sont les nombres de p-combinaisons d'ensembles finis.

Second semestre

Analyse 4 – Suites réelles

Contenus	Commentaires
a) Généralités	
Définition. Combinaison linéaire, produit et quotient. Suite majorée, suite minorée.	Les propriétés des suites seront à relier à celles vues pour les fonctions.
Représentation graphique sous la forme d'un nuage de points.	
Monotonie.	On se sert de la caractérisation propre aux suites.
Suite définie par récurrence.	Aucune méthodologie d'étude particulière n'est exigible. On pourra présenter quelques exemples de suites récurrentes d'ordre 2. L'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ pourra faire l'objet d'une activité, mais aucune connaissance générale n'est au programme. $\rightleftharpoons$ Exemples de phénomènes d'évolution représentables par un modèle discret : croissance bactérienne, dynamique des populations.
b) Limites	
Suite convergente, suite divergente vers $-\infty$ et $+\infty$. Suite divergente.	La définition d'une limite par (ϵ, N) doit être donnée en rapport avec le comportement graphique et verbalisée. Aucune des démonstrations relatives aux propriétés générales sur les limites n'est exigible.
Opérations sur les limites.	
Limites et relation d'ordre.	
Théorème de comparaison, théorème d'encadrement dit « des gendarmes ».	
Théorème de la limite monotone : existence d'une limite finie ou infinie pour les suites monotones.	
	La définition des suites adjacentes n'est pas au programme.
c) Suites équivalentes	
Suites équivalentes, notation $u_n \sim v_n$. Symétrie. Transitivité. L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante.	Le développement sur les équivalents doit être modeste et se limiter aux suites dont le terme général ne s'annule pas.
Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	

Analyse 5 – Limites et continuité

Contenus	Commentaires
a) Limites	
Limite d'une fonction en un point.	La définition d'une limite par (ϵ, α) doit être donnée en rapport avec le comportement graphique.
Limite à droite, limite à gauche. Limite en $-\infty$, limite en $+\infty$.	On insiste sur le caractère local de la notion. On se limitera à des exemples simples.
Limite d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	
Limite d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle en l'infini.	
Limites et relation d'ordre.	
Théorème de comparaison, théorème d'encadrement dit « des gendarmes » pour les fonctions.	
Théorème des croissances comparées.	Il s'agit de comparer le comportement en 0 et en $\pm\infty$ des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto e^{\lambda x}$ (avec $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\lambda > 0$).

Contenus (suite)	Commentaires
b) Notion de continuité	
Continuité en un point.	
Prolongement par continuité.	
Continuité sur un intervalle.	
Opérations et composition.	Les fonctions obtenues par opérations algébriques et composition à partir des fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.
Continuité sur un intervalle.	
c) Propriétés des fonctions continues sur un intervalle	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Seules les interprétation graphiques sont exigibles. $\rightleftharpoons$ résoudre de manière approchée une équation de type $f(x) = 0$.
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	
Une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.	
Propriétés de l'application réciproque.	
Fonctions $\sqrt[n]{\ }$.	La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$ (respectivement sur $\mathbf{R}_+$) lorsque n est impair (respectivement n est pair).
Fonction arctangente.	On présente et étudie brièvement la courbe représentative de la fonction arctan, obtenue par symétrie à partir de celle de la restriction de la tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Analyse 6 – Dérivation

Cette section s'appuie sur les notions de nombre dérivé et de fonction dérivée, introduites au premier semestre. L'aspect graphique (tangentes) est à souligner. Les fonctions envisagées doivent être supposées suffisamment régulières; on évitera toute surenchère au niveau des hypothèses.

Contenus	Commentaires
a) Dérivées	
Nombre dérivé et opérations : linéarité, produit, quotient et fonction composée.	
Fonction dérivée et opérations : linéarité, produit, quotient et fonction composée.	
Dérivée de l'application réciproque.	
Dérivées des fonctions $\sqrt[n]{\ }$, de la fonction arctan.	On utilise la courbe représentative des fonctions puissance et tangente pour suggérer la dérivabilité des fonctions réciproques. La formule est obtenue par dérivation de la composée.
Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Seule la définition est un attendu du programme; elle prélude à l'étude de l'intégration.
b) Théorème des accroissements finis et applications	
Théorème des accroissements finis.	La démonstration n'est pas exigible. L'inégalité des accroissements finis n'est pas exigible, celle-ci pouvant être trouvée à partir du théorème du même nom.
Application à l'étude de la monotonie d'une fonction dérivable sur un intervalle.	Les liens croisés entre tableaux de variation, tableaux de signes, tableaux de valeurs et courbes représentatives demeurent importants à souligner.

Analyse 7 – Calcul intégral

Contenus	Commentaires
a) Notion d'intégrale	
Intégrale d'une fonction continue et positive f sur un segment $[a,b]$: il s'agit de l'aire sous la courbe. Elle est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.	La notion d'aire est ici intuitive et ne doit pas soulever de question théorique. Les sommes de Riemann sont hors-programme. $\rightleftharpoons$ Calcul de la valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.
Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.	Définition à partir de la partie positive et de la partie négative de la fonction.
Extension de la définition au cas $b<a$. Valeur moyenne d'une fonction.	
b) Propriétés de l'intégrale	
Relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance, majoration de la valeur absolue d'une intégrale.	
c) Théorème fondamental de l'analyse	
Si f est continue sur un intervalle I et si a est un élément de I alors la fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.	
Si F est une primitive de f sur I, pour tous a et b de I on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$	Notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]_a^b$.
d) Procédés d'intégration	
Intégration par parties.	Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'une intégration par parties sera indiquée.
Intégration par changement de variable.	Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, le changement de variable sera donné.

Algèbre linéaire 3 – Espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ ($n \leq 4$)

Contenus	Commentaires
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$. Familles finies de vecteurs de $\mathbf{R}^n$: familles génératrices d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$; dépendance, indépendance linéaire d'un nombre fini de vecteurs.	
Bases et dimension d'un sous espace vectoriel, coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.	On admet le résultat : tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ (autres que le singleton nul) admettent une base, et elles ont toutes le même cardinal. On convient que l'espace nul est de dimension nulle.
Base canonique de $\mathbf{R}^n$. Droite vectorielle, plan vectoriel.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Le rang est relié à l'algorithme du pivot; on admet qu'il ne dépend pas de la manière de choisir les pivots.

Algèbre linéaire 4 – Applications linéaires de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$

Contenus	Commentaires
Applications linéaires, endomorphismes. Opérations : combinaison linéaire, composition.	
Noyau, ensemble image, rang d'une application linéaire.	On fait le lien avec les notions d'injection, de surjection et de bijection.
Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base. Matrice d'une application linéaire dans des bases de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^n$. Matrice d'une combinaison linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application linéaire réciproque.	L'application linéaire canoniquement associée à une matrice est utilisée sans justification théorique.

Probabilités 2 – Concepts de base des probabilités

Contenus	Commentaires
a) Vocabulaire	
Épreuve (expérience aléatoire). Univers. Notion d'événement. Événement certain, impossible.	En première année on se limitera au cas où l'univers est fini et où l'algèbre des événements est égale à l'ensemble des parties de l'univers. ⇌ On peut en particulier s'appuyer sur des exemples issus de la génétique : code génétique et probabilités d'apparitions d'un triplet de codons donné, transmission d'allèle pour un gène, génétique des populations, etc.
Événement élémentaire. Événements incompatibles, événement contraire. Système complet d'événements.	
b) Probabilité	
Définition. Espace probabilisé. Propriétés. Dans le cas d'un univers fini, caractérisation d'une probabilité par la donnée des probabilités des événements élémentaires. Cas de l'équiprobabilité (cas favorables, cas possibles).	
c) Probabilités conditionnelles	
Définition. Notations : $P(A/B)$ et $P_B(A)$. Propriétés.	On fait observer que P_B est une autre probabilité, mais aucune théorie n'est à construire.
Théorème des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales $P(B) = \sum_i P(B \cap A_i)$.	Dans le cas où les $P(A_i)$ sont non nuls, interprétation en termes de probabilités conditionnelles ; on valorise des représentations arborescentes ou en tableau.
Théorème de Bayes. Indépendance de deux événements. Événements mutuellement indépendants.	

Probabilités 3 – Variables aléatoires sur un univers fini

Contenus	Commentaires
Définition.	On se limite au cas où l'univers est fini, et par conséquent l'ensemble des valeurs prises est fini.
Système complet constitué des événements $\{X = x\}$ pour $x \in X(\Omega)$.	
Loi de probabilité d'une variable discrète.	Diagramme en bâtons.

Contenus (suite)	Commentaires
Exemples fondamentaux de variables aléatoires : lois uniforme, de Bernoulli, binomiale.	Ces exemples ont été introduits en classe de Première.
Définition de la fonction de répartition.	Représentation graphique.
Espérance mathématique : définition, positivité, linéarité.	On met en valeur la formule $E(aX+b) = aE(X)+b$. La linéarité dans le cas général est admise.
Théorème de transfert pour le calcul de l'espérance de $u(X)$.	
Variance et écart-type : définition. Formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.	On met en valeur la formule $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe TB
2nde année

Programme de mathématiques TB2

Préambule

Objectif de la formation

En classe de TB2 l'objectif est, dans le cadre d'un approfondissement de la formation, d'amener l'étudiant à intégrer les différentes étapes permettant de résoudre un problème exprimable de façon mathématique. L'enjeu est la reformulation et la résolution de problèmes issus de contextes ou de réalités a priori non mathématiques (provenant souvent d'autres disciplines).

Ainsi sont mises en jeu diverses compétences. Certaines ont déjà été envisagées en première année (TB1), et sont consolidées en seconde année :

1. Engager une recherche, définir une stratégie.
2. Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique.
3. Représenter, changer de registre.
4. Raisonner, démontrer, argumenter…
5. Calculer (symboliquement ou numériquement avec une calculatrice ou un ordinateur), maîtriser le formalisme mathématique.
6. Communiquer à l'écrit et à l'oral.

D'autres constituent des objectifs plus spécifiquement approfondis en seconde année, dans la perspective du concours :

— Identifier un problème sous différents aspects ;
— mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes ;
— critiquer ou valider un modèle ou un résultat.

Buts visés

Le programme de mathématiques de TB2 approfondit celui de TB1, ce qui se traduit par les enjeux suivants.

— Consolider les acquis mathématiques de TB1, notamment en matière de calculs et raisonnement. Par souci de clarté, il a été choisi de numéroter de manière compatible les têtes de chapitre des programmes de TB1 et de TB2.
— Généraliser les concepts introduits en TB1 en augmentant la taille et la complexité des objets étudiés.
— Mettre un accent particulier sur la notion de modélisation, où se confrontent les mathématiques et les autres sciences.

Équilibre entre compétences

Les différentes compétences sont développées puis évaluées (au cours de l'année puis lors du concours) en veillant à leur équilibre. On prend garde en particulier à ne pas surdévelopper une compétence par rapport à une autre.

Les capacités en calcul par exemple (point 5 ci-dessus), lorsqu'elles sont propres aux mathématiques (comme la justification de la convergence d'une série ou d'une intégrale généralisée), restent relativement simples, l'objectif n'étant pas ici d'aboutir à une virtuosité technique poussée. On attend, en la matière, une maîtrise solide des calculs, concepts et théorèmes mathématiques, dans des situations simples et ordinaires, sans pour autant négliger les compétences 1, 2, 3, 4 et 6.

Contenu

Probabilités

Les probabilités, abordées en première année (TB1) et étudiées selon différentes modalités depuis la classe de troisième, comportent plusieurs aspects.

- ▷ Un approfondissement des notions vues en TB1 : reprise des techniques élémentaires et des raisonnements vus en TB1, et développement de ceux-ci, motivant l'introduction d'outils comme les séries ou les intégrales généralisées. Le but n'est pas d'étudier ces objets pour eux-mêmes, ce qui amène à ne manipuler que des variables aléatoires à valeurs positives (une exception est faite de la loi normale).
- ▷ Une importante connexion avec la notion de modélisation : modélisation par des événements, des probabilités conditionnelles, des lois classiques.
- ▷ Une reprise des résultats présentés en classe terminale. Afin de faciliter le travail de l'étudiant dans l'assimilation des connaissances, on reprend ces résultats tels qu'ils sont formulés dans les programmes de classe terminale.

Algèbre linéaire

Dans une démarche d'extension typique des mathématiques, l'algèbre linéaire est étendue en abordant la notion générale d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et la dimension finie est envisagée dans sa généralité (les espaces vectoriels présentés en cours pouvant être de dimension $n \geq 4$).

On commence par les applications linéaires avant d'aborder la notion générale de représentation d'un endomorphisme par une matrice dans une base quelconque, visant essentiellement la diagonalisation des matrices ou endomorphismes en dimension restreinte (4 au plus).

En géométrie euclidienne les notions de produit scalaire et de projection orthogonale préparent à l'analyse de données statistiques en grande dimension, qui pourra être abordée dans la poursuite d'études.

Analyse

L'analyse de TB1 est consolidée pendant l'année de TB2. De nouveaux éléments sont introduits (séries et intégrales impropres), qui pour la plupart trouvent leur cadre naturel dans le contexte des probabilités. Par ailleurs, les développements limités participent de la modélisation fonctionnelle et fournissent des exemples d'approximation. Enfin, une première approche des équations différentielles non linéaires permet d'enrichir les liens interdisciplinaires.

Mathématiques pratiques

Le calcul effectif se fait le plus souvent, aujourd'hui, au moyen d'outils de calcul (logiciel, langage de programmation ou calculatrice), ce qu'il est prévu d'évaluer dans l'oral du concours, où une place importante est faite au calcul numérique et aux représentations graphiques.

Comme en première année, les situations permettant de mettre en évidence des liens avec les autres enseignements scientifiques sont signalées par un symbole $\rightleftharpoons$. Ces questions sont susceptibles de fournir le cadre d'une épreuve écrite ou orale de mathématiques, mais aucune connaissance spécifique n'est exigible à leur sujet.

Programme de seconde année

La répartition en chapitres proposée ci-dessous est fournie à titre indicatif et ne constitue pas une progression figée ou obligatoire. Les impératifs pédagogiques liés à la préparation aux concours peuvent justifier une organisation différente, sous réserve de maintenir une structure cohérente.

Des temps de consolidation portant, sous la forme d'exercices, sur les acquis de TB1 ont été insérés avant certains chapitres de TB2. Ils permettent de réinvestir les notions abordées en première année. Ils ne doivent pas être pris dans un sens restrictif : des approches numériques, pouvant s'appuyer sur le programme d'informatique ou recourir à des outils logiciels ou des calculatrices peuvent tout aussi bien renforcer la maîtrise des concepts et de leurs applications.

Consolidation 1 – Nombres complexes et trigonométrie

Exercices et situations illustrant le programme de première année.

Consolidation 2 – Systèmes linéaires et matrices

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Algèbre linéaire 1, Algèbre linéaire 2).

Outils et calculs

Les compléments présentés dans ce chapitre sont essentiellement destinés aux probabilités discrètes.

Contenus	**Commentaires**
Reprise et extension des règles de calcul sur le symbole $\sum$.	Changements d'indices (translations et symétries), télescopages.
Sommes doubles du type $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} a_{i,j}$.	Les attendus du programme concernant les sommes doubles se limitent au maniement des sommations du type indiqué.

Algèbre linéaire 5 – Espaces vectoriels de dimension finie

On reprend les notions vues en première année et on les étend à tout espace vectoriel sur le corps K (K étant égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), de dimension finie. L'utilisation d'espaces vectoriels de dimension infinie n'est pas un attendu du programme.

Contenus	**Commentaires**
Structure d'espace vectoriel.	Les espaces vectoriels suivants doivent être vus à titre d'exemples : K^n, $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathscr{M}_{n,p}(K)$.
Sous-espaces vectoriels. Sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	On utilise la notation $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.
Intersection de sous-espaces vectoriels.	
Familles finies de vecteurs, familles génératrices d'un sous-espace vectoriel.	
Familles libres finies, familles liées finies.	
Bases finies d'un espace vectoriel.	
Un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une base finie ou s'il est réduit au singleton nul.	On convient que l'espace nul est de dimension nulle.

Contenus (suite)	Commentaires
Dans un espace vectoriel E non nul de dimension finie : — toutes les bases de E ont le même cardinal, qu'on appelle la dimension de E ; — si une famille de vecteurs de E est libre, elle a un cardinal inférieur ou égal à la dimension de E ; — si une famille de vecteurs de E est génératrice, elle a un cardinal supérieur ou égal à la dimension de E ; — si une famille de vecteurs de E a un cardinal égal à la dimension de E, elle est libre si et seulement si elle est génératrice.	Compte tenu des objectifs pédagogiques, la plupart de ces énoncés doivent être admis, mais on peut montrer comment certains de ces résultats peuvent en impliquer d'autres.
Coordonnées d'un vecteur dans une base.	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. L'étude des matrices proprement dite est abordée plus loin (Algèbre linéaire 7).
Bases canoniques de K^n et $\mathbf{R}_n[X]$. Rang d'une famille finie de vecteurs. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la dimension de F est inférieure ou égale à la dimension de E. Si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.	

Algèbre linéaire 6 – Applications linéaires

Contenus	Commentaires
a) Définition, opération, noyau et image	
Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.	
Opérations : combinaison linéaire, composition, réciproque.	L'étude de $\mathscr{L}(E,F)$ en tant qu'espace vectoriel n'est pas un attendu du programme.
Noyau, ensemble image, rang d'une application linéaire.	On établit le lien entre le noyau et l'injectivité, le lien entre l'ensemble image et la surjectivité.
b) Application linaire et dimension finie	
Théorème du rang : $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$.	Relation admise.
Caractérisation d'un isomorphisme : l'image d'une base de E est une base de F.	

Algèbre linéaire7 – Matrices à coefficients dans R et C

Contenus	Commentaires
a) Représentation par des matrices	
Matrice représentative d'une famille de vecteurs dans une base.	
Matrice d'une application linéaire. Matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E, une base de E ayant été choisie.	On revoit la notion de matrice représentative d'une application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$, et on l'étend à toute matrice d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies.
b) Changements de base	
Changement de base, matrices de passage.	On met en évidence l'inversibilité de la matrice de passage ainsi que la signification de l'inverse.
Effet d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'un endomorphisme.	
c) Rang d'une matrice	

Contenus (suite)	Commentaires
Formule $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$. Lien entre l'inversibilité d'une matrice carrée et son rang.	Relation admise. On fait dès lors le lien entre les différentes notions de rang, vues à propos des systèmes, des familles de vecteurs, des matrices et des applications linéaires.
d) Noyau, image d'une matrice	
Interprétation d'une matrice carrée de taille n comme endomorphisme de K^n (muni de la base canonique).	Cette interprétation permet de parler d'image, noyau et de rang de la matrice en lien avec les mêmes notions pour les applications linéaires.

Algèbre linéaire 8 – Géométrie euclidienne dans $\mathbf{R}^n$

Ce chapitre est inséré dans l'étude de l'algèbre linéaire et propose une extension très modeste des notions de géométrie euclidienne de dimension n à laquelle il confère un aspect visuel et appliqué; il est aussi étudié pour son utilité en sciences physiques, chimiques, en biotechnologies et en probabilités avec la mise en place d'un résultat fondamental pour les applications, la projection orthogonale sur un sous-espace.

Contenus	Commentaires
a) Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$	
	On illustrera les notions en petite dimension.
Produit scalaire usuel (ou canonique) dans $\mathbf{R}^n$.	
Norme euclidienne.	La preuve de l'inégalité triangulaire n'est pas exigible. Les cas d'égalité ne constituent pas un objectif du programme.
Vecteurs orthogonaux.	On peut faire observer qu'une famille de vecteurs tous non nuls et deux à deux orthogonaux est libre.
Bases orthonormales de $\mathbf{R}^n$.	On souligne le fait que l'expression du produit scalaire canonique et de sa norme euclidienne sont indépendants de la base orthonormale choisie. La matrice de passage P de la base canonique à une base orthonormale vérifie ${}^tPP = I_n$.
b) Projection orthogonale	
Distance entre deux vecteurs.	
On appelle projection orthogonale sur un sous-espace F de $\mathbf{R}^n$ un endomorphisme p de $\mathbf{R}^n$ tel que : pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $p(x) \in F$ et pour tout $y \in F$, $p(x) - x$ est orthogonal à y.	
Existence et unicité de la projection orthogonale p sur un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	On admet qu'il est possible de trouver une base orthonormale du sous-espace F. Écriture de la projection orthogonale dans une base orthonormale de F.
Application : distance d'un vecteur à un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	Interprétation en tant que démarche d'optimisation ou de meilleure approximation; en exemple, on peut interpréter l'ajustement affine (régression linéaire) comme une projection sur un sous-espace de dimension 2.

Algèbre linéaire 9 – Valeurs propres et vecteurs propres

Contenus	Commentaires
a) Éléments propres	
Valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension inférieure ou égale à 4.	

Contenus (suite)	Commentaires
Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée de dimension inférieure ou égale 4.	La recherche pratique des valeurs et vecteurs propres d'une matrice A conduit le plus souvent à l'étude d'un système linéaire homogène ou du rang de la matrice $A-\lambda I$. On rappelle à ce sujet que les déterminants de taille supérieure à 2 sont hors programme
Sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.	
Une famille de vecteurs obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.	
b) Diagonalisation des matrices et des endomorphismes	
Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable.	Il est ici commode de rappeler l'identification d'une matrice carrée à un endomorphisme de K^n, évitant les répétitions inutiles.
La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à la dimension de E.	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres égale la dimension de E.	$\rightleftharpoons$ Exemples de calculs de puissances d'une matrice issus de situations itératives en biologie des populations, en probabilités. $\rightleftharpoons$ Application à l'étude de certaines suites apparaissant dans des situations issues des probabilités, des sciences biologiques : suites définies par une récurrence linéaire du type $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ ($a, b \in \mathbf{R}$), ou suites récurrentes linéaires « croisées ».
Toute matrice symétrique réelle de taille inférieure ou égale à 4 est diagonalisable, la matrice de passage P vérifiant $P^{-1} = {}^tP$.	Résultat admis. On met en valeur les relations matricielles ${}^tPAP = D$ et ${}^tPP = I$. Le cas échéant, on observera que la base diagonalisante est orthonormée.

Consolidation 3 – Fonctions et dérivées

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 1, Analyse 2, Analyse 5, Analyse 6).

Analyse 8 – Dérivation et développements limités

Ce chapitre élargit certains concepts vus en première année en introduisant les dérivées n-èmes et les développements limités à l'ordre n.

Les exercices de calcul de développements limités ont pour objet de faciliter l'assimilation des propriétés fondamentales et ne doivent pas être orientés vers la virtuosité calculatoire : sur les exemples numériques, on évitera tout développement limité au-delà de l'ordre 3.

Contenus	Commentaires
a) Limites de fonctions et équivalents	
Fonctions équivalentes en un point ou à l'infini, notation $f \underset{a}{\sim} g$.	On se limite aux fonctions ne s'annulant pas sur un intervalle de la forme $]a, b[$ ou $]b, a[$. On ne formalise pas la notion de voisinage, on s'en tient à son interprétation intuitive.
Symétrie. Transitivité. L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites. Si la suite (u_n) tend vers a, et deux fonctions f et g sont définies et équivalentes au voisinage de a alors $f(u_n) \sim g(u_n)$. Si $u(x) \to b$ lorsque $x \to a$ et si $f \sim_b g$ alors $f \circ u \sim_a g \circ u$.	Le développement reste modeste et se limite aux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage du point de référence.

Contenus (suite)	Commentaires
Équivalents en 0 des fonctions $x \mapsto \exp(x) - 1$, $x \mapsto \ln(1+x)$, sin, $x \mapsto 1 - \cos(x)$ et $x \mapsto (1+x)^{\alpha} - 1$.	
b) Dérivées n-ièmes	
Fonction n fois dérivable en un point ou sur un intervalle, dérivée n-ième d'une fonction.	On peut revoir à cette occasion plusieurs études de fonctions. La formule de Leibniz est hors-programme. $\rightleftharpoons$ Lien avec la cinématique du point matériel : vitesse, accélération.
Fonction de classe $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^{\infty}$.	
c) Développements limités au voisinage de 0.	
Définition de la notation $o(x^n)$ pour désigner des fonctions négligeables devant la fonction $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbf{Z}$ et au voisinage de 0 ou de l'infini.	On se ramène, aussi souvent que nécessaire, à la limite d'un quotient.
Définition des développements limités en 0.	Les problèmes de développement limité en un réel non nul ou en $\pm\infty$ sont ramenés en 0. L'étude des développements asymptotiques ne sont pas un attendu du programme.
Interprétation des développements limités d'ordre 1 et 2 (ou plus si nécessaire) en termes de position relative entre tangente et courbe.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit.	L'obtention d'un développement limité pour une fonction composée est présentée et exercée sur des exemples simples, comme $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
Primitivation d'un développement limité.	
Développements limités de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et exp.	Le second est obtenu par primitivation et le troisième par primitivations successives.
Formule de Taylor-Young : existence d'un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	La formule de Taylor-Young peut être admise, ou obtenue par primitivations successives dans le cadre d'une récurrence.
Développements limités usuels au voisinage de zéro des fonctions : cos, sin et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ où α est un réel.	

Consolidation 4 – Équations différentielles linéaires

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 3).

Analyse 9 – Équations différentielles

Ce chapitre consolide les équations différentielles vues en TB1, et présente deux exemples d'équations différentielles non linéaires autonomes.

Contenus	Commentaires
Exemple d'étude de l'équation différentielle non linéaire autonome : $y' + ky^2 = 0$.	On montre comment obtenir une expression des solutions sans se poser la question d'éventuelles annulations. La définition des équations autonomes est hors programme. Le changement de fonction inconnue peut être envisagé en cours, mais n'est pas un attendu du programme. $\rightleftharpoons$ Réactions d'ordre 2 en cinétique chimique (on met en valeur, dans ce contexte particulier, la notion de conditions initiales).

Contenus (suite)	Commentaires
Exemple d'étude de l'équation logistique $y' = y(1-y)$ dans le seul cas où $0 < y < 1$.	On pourra introduire la fonction auxiliaire $z = \frac{1}{y}$. $\rightleftharpoons$ Ce modèle (dit logistique normalisé) trouve sa source en dynamique des populations. Discussion des stratégies r et K. $\rightleftharpoons$ Méthode d'Euler pour les équations différentielles.

Consolidation 5 – Suites réelles

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 4).

Probabilités 4 – Concepts de base des probabilités

Ce chapitre a pour but de développer les variables aléatoires réelles vues en première année, et de compléter et consolider les techniques du calcul des probabilités vues en première année.

On ne soulèvera aucune difficulté théorique sur les notions introduites dans cette partie du programme où un bon nombre de résultats seront admis.

Les séries à termes positifs sont exclusivement introduites en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques les séries ne pourront intervenir que dans le cadre probabiliste.

Les séries considérées seront à termes positifs.

Contenus	Commentaires
a) Séries à termes positifs	
Définition, terme général, somme, somme partielle d'ordre n.	
Convergence et divergence d'une série.	On convient d'utiliser le symbole $\sum u_n$ pour désigner la série (sans préjuger de sa convergnce)
La somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ est définie comme la limite, finie ou infinie, de la suite des sommes partielles. On a l'alternative : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$ ou $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$.	Le symbole $+\infty$ ne peut être manipulé que dans le cadre des sommes de séries à termes positifs. Les règles de calcul sont déduites des propriétés des limites de suites (vues en première année).
Propriétés de linéarité de la somme. Relations sur les sommes $\sum u_n + v_n = \sum(u_n + v_n)$ et $\sum \lambda u_n = \lambda \sum u_n$ pour $\lambda > 0$.	On relie les identités : $(+\infty) + a = +\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $\lambda.(+\infty) = +\infty$ (pour $\lambda > 0$) avec les théorèmes correspondants sur les limites de suites.
Convergence et somme des séries géométriques et des séries de terme général nq^{n-1} (avec $0 < q < 1$) ; convergence des séries $n(n-1)q^{n-2}$ pour $0 < q < 1$, $\sum \frac{x^k}{k!}$ pour $x > 0$.	On admet la formule $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
Convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum \frac{1}{n}$.	L'étude générale des séries de Riemann est hors programme.
Thèorèmes de convergence pour deux séries à termes positifs u_n et v_n : • théorème de comparaison si $u_n \leq v_n$, • si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	Tout autre critère de convergence est hors programme. Dans le premier cas, on majorera la somme de la série de gauche par celle de la série de droite si convergence il y a, et on envisagera la situation où la série de gauche diverge. Les résultats relatifs aux restes et sommes partielles sont hors programme.
b) Généralités sur les probabilités	

Contenus (suite)	Commentaires
Extension des définitions données en première année au cas où l'univers est un ensemble infini.	On pourra signaler les problèmes qui peuvent survenir pour la définition de la probabilité d'une partie quelconque de l'univers mais la notion de tribu et les résultats sur la probabilité d'une réunion (respectivement une intersection) croissante (respectivement décroissante) d'événements sont hors programme.
Pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles, expression de $P(\bigcup A_n)$.	
Révision et extension à ce nouveau cadre des résultats de première année sur les probabilités et sur les probabilités conditionnelles.	

Probabilités 5 – Variables aléatoires discrètes positives

Contenus	Commentaires
a) Définitions	
On étendra la définition vue en première année au cas où l'ensemble des valeurs prises est contenu dans l'ensemble des entiers positifs.	On indiquera que la limitation portant sur le signe pourra être levée, dans un cadre théorique plus vaste, une fois en école d'ingénieur ou en L3.
Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.	Diagramme en bâtons.
Fonction de répartition. Croissance et limite en $+\infty$.	Représentation graphique.
Détermination de la loi de la variable aléatoire à partir de la fonction de répartition.	Rien n'est exigible concernant la loi du maximum ou du minimum de deux variables aléatoires.
b) Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire discrète positive.	
Théorème de transfert : expression de l'espérance de $u(X)$, où $u(X)$ est elle aussi une variable aléatoire discrète positive.	Ce résultat est admis.
Linéarité de l'espérance : $E(X+\lambda Y) = E(X)+\lambda E(Y)$	Résultat admis et limité au cas où $X+\lambda Y$, X et Y sont des variables aléatoires discrètes positives qui possèdent une espérance.
Variance et écart-type.	La formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ doit être connue.
c) Expériences et variables aléatoires indépendantes	
Expression de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes dont on connait les lois.	L'indépendance mutuelle de plus de deux variables aléatoires peut être mentionnée mais n'est pas un attendu du programme.
Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.	Résultat admis.
Variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.	
d) Lois classiques	
Présentation des lois classiques : — loi certaine, — loi uniforme discrète, — loi de Bernoulli, — loi de Poisson.	Exception faite de la loi de Poisson, les étudiants devront savoir reconnaître les situations classiques de modélisation pour ces lois. L'espérance et la variance des lois certaine, de Bernoulli et de Poisson doivent être connues, ainsi que l'espérance de la loi uniforme.
e) Schéma de Bernoulli et conséquences	
Formalisme du schéma de Bernoulli.	

Contenus (suite)	Commentaires
Présentation des lois suivantes dans le cadre d'un schéma de Bernoulli : — loi binomiale, — loi géométrique.	Les étudiants devront savoir reconnaître les situations classiques de modélisation pour ces lois. L'espérance et la variance de ces lois doivent être connues. La loi hypergéométrique ne constitue pas un attendu du programme.
Somme de deux variables binomiales indépendantes de même paramètre réel p.	

Consolidation 6 – Primitives et intégrales

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 7).

Probabilités 6 –Variables aléatoires à densité

L'intégrale généralisée (ou impropre) est exclusivement introduite en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques les intégrales généralisées et de fonctions continues par morceaux ne pourront intervenir que dans un cadre probabiliste.

Contenus	Commentaires
a) Fonctions continues par morceaux	
Définition d'une fonction continue par morceaux sur **R**.	Les fonctions considérées n'ont qu'un nombre fini de discontinuités (et admettent des limites finies à droite et à gauche en tout point).
Généralisation de la notion d'intégrale aux fonctions continues par morceaux.	On évitera les développements théoriques pour se consacrer aux calculs pratiques.
Propriétés.	On pourra admettre la plus grande partie des adaptations aux fonctions continues par morceaux des résultats mis en place pour les fonctions continues.
Soit f une fonction continue par morceaux sur **R** et soit a un réel, étude des propriétés de la fonction F définie sur **R** par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Croissance dans le cas où f est positive, continuité et dérivabilité.	Résultats admis.
b) Définition de l'intégrale généralisée (ou impropre) en une borne infinie	
Théorème de la limite monotone pour les fonctions.	
Définition de l'intégrale d'une fonction positive continue par morceaux sur **R**, sur un intervalle de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$. Convergence et divergence.	On souligne l'importance du théorème de la limite monotone pour démontrer une convergence. On convient que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (resp. $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$), ou bien est fini, ou bien vaut $+\infty$. Interprétation de ces quantités en termes d'aire.
Utilisation d'une primitive.	L'exemple fourni par les intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est choisi comme illustration, en particulier pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.
L'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.	Résultat admis.
c) Propriétés	
Relation de Chasles. Linéarité.	
Adaptation de la formule d'intégration par parties.	On souligne la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.

Contenus (suite)	Commentaires
Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales généralisées.	Si la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant les limites $\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β, alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ convergent ou divergent simultanément, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.
Théorèmes de convergence pour deux fonctions positives f et g : • théorème par comparaison si $f \leq g$, • si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors les intégrales généralisées en b $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.	Résultats admis. Tout autre critère de convergence est hors programme. b désigne ici une borne infinie.
d) Généralités sur les variables aléatoires positives à densité	
Densité de probabilité. Une fonction de densité est une fonction définie sur $\mathbf{R}$, continue par morceaux, positive, dont l'intégrale généralisée converge et vaut 1.	
Variable aléatoire positive admettant une densité.	On indiquera que la limitation portant sur le signe pourra être levée, dans un cadre théorique plus vaste, une fois en école d'ingénieur ou en L3.
Fonction de répartition : expression sous la forme d'une intégrale, croissance, limite en $+\infty$.	
Indépendance de deux variables aléatoires à densité.	L'indépendance de X et Y est exprimée par rapport aux événements $(X \in I)$ et $(Y \in J)$, où I et J sont des intervalles.
Sur des exemples simples, recherche de la loi de la variable positive $Y = u(X)$, X ayant une densité connue et u étant une fonction usuelle.	On peut prendre comme exemples $Y = X^2$, $Y = aX + b$, etc. Démontrer qu'une variable admet une densité n'est pas un objectif du programme.
Espérance, variance et écart-type de variables aléatoires positives à densité.	On fait une analogie avec le cas discret.
Formule de König-Huygens.	Résultat admis par analogie avec le cas discret.
Théorème de transfert pour le calcul de l'espérance de $u(X)$, où u est une fonction usuelle.	Ce résultat est admis.
e) Lois classiques	
Étude des lois classiques : loi uniforme, loi exponentielle, loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.	Transformation pour se ramener à la loi normale centrée réduite. La propriété d'invariance temporelle de la loi exponentielle n'est pas un attendu du programme. ⇌ Simulation des lois uniforme, exponentielle, normale. ⇌ Exemples de phénomènes naturels pouvant être modélisés par des lois uniformes, exponentielles, normales.
Espérances de ces lois.	L'espérance d'une variable aléatoire uniforme et l'espérance d'une variable suivant une loi normale peuvent faire apparaître des intégrales de fonctions non positive ; on leur donne un sens au moyen de découpages. Les espérances des lois mentionnées doivent être connues.

Probabilités 7 – Couples de variables aléatoires discrètes

On se limite ici aux couples de variables aléatoires dont l'une des variables au moins est finie et prend au plus quatre valeurs.

Contenus	Commentaires
Notation (X, Y).	
Loi conjointe, lois marginales.	La loi de la somme de deux variables aléatoires n'est pas un attendu du programme.
Lois marginales. Lois conditionnelles.	Interprétation de la notion d'indépendance.
Définition de la covariance, formule de König-Huygens $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.	La loi du produit de deux variables aléatoires n'est pas un attendu du programme.
Variance de $X + Y$.	On remarquera qu'en cas d'indépendance, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, mais que la réciproque peut être fausse.

Probabilités 8 – Comportements asymptotiques et prise de décision

Ce chapitre met en place un contexte d'étude de phénomènes limites, amenant à l'étude en situation de quelques résultats simples de statistique inférentielle ; les liens avec les autres chapitres sont évidemment à souligner.

Contenus	Commentaires
a) Comportements asymptotiques	
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour des variables aléatoires positives.	
Loi faible des grands nombres.	
Théorème central limite : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2, alors pour de grandes valeurs de n, la moyenne empirique centrée réduite suit approximativement une loi normale centrée réduite.	Théorème admis. La moyenne empirique centrée réduite est définie par $M_n^* = \frac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, où M_n est la moyenne empirique définie par $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Aucune propriété de M_n n'est exigible.
Cas de la loi binomiale : théorème de Moivre-Laplace.	$\rightleftharpoons$ On illustre numériquement cette approximation.
b) Introduction aux tests	
Test de conformité à la moyenne.	On traitera le cas particulier d'une proportion par majoration de l'écart-type. Les notions de risque α et β, de puissance, ne sont pas au programme. $\rightleftharpoons$ En lien avec l'informatique, mécanisme et simulation de tests statistiques.

Consolidation 7 – Calculs de dérivées partielles

Exercices et situations illustrant le programme de première année.

Analyse 10 – Notions sur les fonctions réelles de plusieurs variables réelles

Ce chapitre, déjà abordé sous le seul angle de la dérivation partielle en première année, met en place, très simplement, le vocabulaire et la problématique des fonctions de plusieurs variables. En Mathématiques, on se limite aux fonctions de deux variables (suffisamment lisses) tout en faisant observer qu'il n'y a pas plus de difficulté à aborder des phénomènes à trois variables.

Contenus	Commentaires
a) Notion de fonction de plusieurs variables et de dérivées partielles	
Définition d'une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.	

Contenus (suite)	Commentaires
Fonction partielle par rapport à une variable. Dérivée partielle par rapport à une variable	$\rightleftharpoons$ Notion de coupe sur un milieu (tissu vivant, terrain). Les règles de dérivation en chaîne ne sont pas au programme.
b) Extrémums d'une fonction de plusieurs variables définie sur $\mathbf{R}^2$ Notion d'extrémum local. Notion de point critique. Un point où une fonction f présente un extremum local et admet des dérivées partielles est critique.	 La localité de l'extrémum est exprimée à l'aide des rectangles.