Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe TB
2nde année

Programme de mathématiques TB2

Préambule

Objectif de la formation

En classe de TB2 l'objectif est, dans le cadre d'un approfondissement de la formation, d'amener l'étudiant à intégrer les différentes étapes permettant de résoudre un problème exprimable de façon mathématique. L'enjeu est la reformulation et la résolution de problèmes issus de contextes ou de réalités a priori non mathématiques (provenant souvent d'autres disciplines).

Ainsi sont mises en jeu diverses compétences. Certaines ont déjà été envisagées en première année (TB1), et sont consolidées en seconde année :

1. Engager une recherche, définir une stratégie.
2. Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique.
3. Représenter, changer de registre.
4. Raisonner, démontrer, argumenter…
5. Calculer (symboliquement ou numériquement avec une calculatrice ou un ordinateur), maîtriser le formalisme mathématique.
6. Communiquer à l'écrit et à l'oral.

D'autres constituent des objectifs plus spécifiquement approfondis en seconde année, dans la perspective du concours :

— Identifier un problème sous différents aspects ;
— mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes ;
— critiquer ou valider un modèle ou un résultat.

Buts visés

Le programme de mathématiques de TB2 approfondit celui de TB1, ce qui se traduit par les enjeux suivants.

— Consolider les acquis mathématiques de TB1, notamment en matière de calculs et raisonnement. Par souci de clarté, il a été choisi de numéroter de manière compatible les têtes de chapitre des programmes de TB1 et de TB2.
— Généraliser les concepts introduits en TB1 en augmentant la taille et la complexité des objets étudiés.
— Mettre un accent particulier sur la notion de modélisation, où se confrontent les mathématiques et les autres sciences.

Équilibre entre compétences

Les différentes compétences sont développées puis évaluées (au cours de l'année puis lors du concours) en veillant à leur équilibre. On prend garde en particulier à ne pas surdévelopper une compétence par rapport à une autre.

Les capacités en calcul par exemple (point 5 ci-dessus), lorsqu'elles sont propres aux mathématiques (comme la justification de la convergence d'une série ou d'une intégrale généralisée), restent relativement simples, l'objectif n'étant pas ici d'aboutir à une virtuosité technique poussée. On attend, en la matière, une maîtrise solide des calculs, concepts et théorèmes mathématiques, dans des situations simples et ordinaires, sans pour autant négliger les compétences 1, 2, 3, 4 et 6.

Contenu

Probabilités

Les probabilités, abordées en première année (TB1) et étudiées selon différentes modalités depuis la classe de troisième, comportent plusieurs aspects.

- ▷ Un approfondissement des notions vues en TB1 : reprise des techniques élémentaires et des raisonnements vus en TB1, et développement de ceux-ci, motivant l'introduction d'outils comme les séries ou les intégrales généralisées. Le but n'est pas d'étudier ces objets pour eux-mêmes, ce qui amène à ne manipuler que des variables aléatoires à valeurs positives (une exception est faite de la loi normale).
- ▷ Une importante connexion avec la notion de modélisation : modélisation par des événements, des probabilités conditionnelles, des lois classiques.
- ▷ Une reprise des résultats présentés en classe terminale. Afin de faciliter le travail de l'étudiant dans l'assimilation des connaissances, on reprend ces résultats tels qu'ils sont formulés dans les programmes de classe terminale.

Algèbre linéaire

Dans une démarche d'extension typique des mathématiques, l'algèbre linéaire est étendue en abordant la notion générale d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et la dimension finie est envisagée dans sa généralité (les espaces vectoriels présentés en cours pouvant être de dimension $n \geq 4$).

On commence par les applications linéaires avant d'aborder la notion générale de représentation d'un endomorphisme par une matrice dans une base quelconque, visant essentiellement la diagonalisation des matrices ou endomorphismes en dimension restreinte (4 au plus).

En géométrie euclidienne les notions de produit scalaire et de projection orthogonale préparent à l'analyse de données statistiques en grande dimension, qui pourra être abordée dans la poursuite d'études.

Analyse

L'analyse de TB1 est consolidée pendant l'année de TB2. De nouveaux éléments sont introduits (séries et intégrales impropres), qui pour la plupart trouvent leur cadre naturel dans le contexte des probabilités. Par ailleurs, les développements limités participent de la modélisation fonctionnelle et fournissent des exemples d'approximation. Enfin, une première approche des équations différentielles non linéaires permet d'enrichir les liens interdisciplinaires.

Mathématiques pratiques

Le calcul effectif se fait le plus souvent, aujourd'hui, au moyen d'outils de calcul (logiciel, langage de programmation ou calculatrice), ce qu'il est prévu d'évaluer dans l'oral du concours, où une place importante est faite au calcul numérique et aux représentations graphiques.

Comme en première année, les situations permettant de mettre en évidence des liens avec les autres enseignements scientifiques sont signalées par un symbole $\rightleftharpoons$. Ces questions sont susceptibles de fournir le cadre d'une épreuve écrite ou orale de mathématiques, mais aucune connaissance spécifique n'est exigible à leur sujet.

Programme de seconde année

La répartition en chapitres proposée ci-dessous est fournie à titre indicatif et ne constitue pas une progression figée ou obligatoire. Les impératifs pédagogiques liés à la préparation aux concours peuvent justifier une organisation différente, sous réserve de maintenir une structure cohérente.

Des temps de consolidation portant, sous la forme d'exercices, sur les acquis de TB1 ont été insérés avant certains chapitres de TB2. Ils permettent de réinvestir les notions abordées en première année. Ils ne doivent pas être pris dans un sens restrictif : des approches numériques, pouvant s'appuyer sur le programme d'informatique ou recourir à des outils logiciels ou des calculatrices peuvent tout aussi bien renforcer la maîtrise des concepts et de leurs applications.

Consolidation 1 – Nombres complexes et trigonométrie

Exercices et situations illustrant le programme de première année.

Consolidation 2 – Systèmes linéaires et matrices

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Algèbre linéaire 1, Algèbre linéaire 2).

Outils et calculs

Les compléments présentés dans ce chapitre sont essentiellement destinés aux probabilités discrètes.

Contenus	**Commentaires**
Reprise et extension des règles de calcul sur le symbole $\sum$.	Changements d'indices (translations et symétries), télescopages.
Sommes doubles du type $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} a_{i,j}$.	Les attendus du programme concernant les sommes doubles se limitent au maniement des sommations du type indiqué.

Algèbre linéaire 5 – Espaces vectoriels de dimension finie

On reprend les notions vues en première année et on les étend à tout espace vectoriel sur le corps K (K étant égal à **R** *ou* **C***), de dimension finie. L'utilisation d'espaces vectoriels de dimension infinie n'est pas un attendu du programme.*

Contenus	**Commentaires**
Structure d'espace vectoriel.	Les espaces vectoriels suivants doivent être vus à titre d'exemples : K^n, $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathscr{M}_{n,p}(K)$.
Sous-espaces vectoriels. Sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	On utilise la notation $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.
Intersection de sous-espaces vectoriels.	
Familles finies de vecteurs, familles génératrices d'un sous-espace vectoriel.	
Familles libres finies, familles liées finies.	
Bases finies d'un espace vectoriel.	
Un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une base finie ou s'il est réduit au singleton nul.	On convient que l'espace nul est de dimension nulle.

Contenus (suite)	Commentaires
Dans un espace vectoriel E non nul de dimension finie : — toutes les bases de E ont le même cardinal, qu'on appelle la dimension de E ; — si une famille de vecteurs de E est libre, elle a un cardinal inférieur ou égal à la dimension de E ; — si une famille de vecteurs de E est génératrice, elle a un cardinal supérieur ou égal à la dimension de E ; — si une famille de vecteurs de E a un cardinal égal à la dimension de E, elle est libre si et seulement si elle est génératrice.	Compte tenu des objectifs pédagogiques, la plupart de ces énoncés doivent être admis, mais on peut montrer comment certains de ces résultats peuvent en impliquer d'autres.
Coordonnées d'un vecteur dans une base.	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. L'étude des matrices proprement dite est abordée plus loin (Algèbre linéaire 7).
Bases canoniques de K^n et $\mathbf{R}_n[X]$. Rang d'une famille finie de vecteurs. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la dimension de F est inférieure ou égale à la dimension de E. Si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.	

Algèbre linéaire 6 – Applications linéaires

Contenus	Commentaires
a) Définition, opération, noyau et image	
Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.	
Opérations : combinaison linéaire, composition, réciproque.	L'étude de $\mathscr{L}(E,F)$ en tant qu'espace vectoriel n'est pas un attendu du programme.
Noyau, ensemble image, rang d'une application linéaire.	On établit le lien entre le noyau et l'injectivité, le lien entre l'ensemble image et la surjectivité.
b) Application linaire et dimension finie	
Théorème du rang : $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$.	Relation admise.
Caractérisation d'un isomorphisme : l'image d'une base de E est une base de F.	

Algèbre linéaire7 – Matrices à coefficients dans R et C

Contenus	Commentaires
a) Représentation par des matrices	
Matrice représentative d'une famille de vecteurs dans une base.	
Matrice d'une application linéaire. Matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E, une base de E ayant été choisie.	On revoit la notion de matrice représentative d'une application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$, et on l'étend à toute matrice d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies.
b) Changements de base	
Changement de base, matrices de passage.	On met en évidence l'inversibilité de la matrice de passage ainsi que la signification de l'inverse.
Effet d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'un endomorphisme.	
c) Rang d'une matrice	

Contenus (suite)	Commentaires
Formule $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$. Lien entre l'inversibilité d'une matrice carrée et son rang.	Relation admise. On fait dès lors le lien entre les différentes notions de rang, vues à propos des systèmes, des familles de vecteurs, des matrices et des applications linéaires.
d) Noyau, image d'une matrice	
Interprétation d'une matrice carrée de taille n comme endomorphisme de K^n (muni de la base canonique).	Cette interprétation permet de parler d'image, noyau et de rang de la matrice en lien avec les mêmes notions pour les applications linéaires.

Algèbre linéaire 8 – Géométrie euclidienne dans $\mathbf{R}^n$

Ce chapitre est inséré dans l'étude de l'algèbre linéaire et propose une extension très modeste des notions de géométrie euclidienne de dimension n à laquelle il confère un aspect visuel et appliqué ; il est aussi étudié pour son utilité en sciences physiques, chimiques, en biotechnologies et en probabilités avec la mise en place d'un résultat fondamental pour les applications, la projection orthogonale sur un sous-espace.

Contenus	Commentaires
a) Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$	
	On illustrera les notions en petite dimension.
Produit scalaire usuel (ou canonique) dans $\mathbf{R}^n$.	
Norme euclidienne.	La preuve de l'inégalité triangulaire n'est pas exigible. Les cas d'égalité ne constituent pas un objectif du programme.
Vecteurs orthogonaux.	On peut faire observer qu'une famille de vecteurs tous non nuls et deux à deux orthogonaux est libre.
Bases orthonormales de $\mathbf{R}^n$.	On souligne le fait que l'expression du produit scalaire canonique et de sa norme euclidienne sont indépendants de la base orthonormale choisie. La matrice de passage P de la base canonique à une base orthonormale vérifie ${}^tPP = I_n$.
b) Projection orthogonale	
Distance entre deux vecteurs. On appelle projection orthogonale sur un sous-espace F de $\mathbf{R}^n$ un endomorphisme p de $\mathbf{R}^n$ tel que : pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $p(x) \in F$ et pour tout $y \in F$, $p(x) - x$ est orthogonal à y.	
Existence et unicité de la projection orthogonale p sur un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	On admet qu'il est possible de trouver une base orthonormale du sous-espace F. Écriture de la projection orthogonale dans une base orthonormale de F.
Application : distance d'un vecteur à un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	Interprétation en tant que démarche d'optimisation ou de meilleure approximation ; en exemple, on peut interpréter l'ajustement affine (régression linéaire) comme une projection sur un sous-espace de dimension 2.

Algèbre linéaire 9 – Valeurs propres et vecteurs propres

Contenus	Commentaires
a) Éléments propres	
Valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension inférieure ou égale à 4.	

Contenus (suite)	Commentaires
Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée de dimension inférieure ou égale 4.	La recherche pratique des valeurs et vecteurs propres d'une matrice A conduit le plus souvent à l'étude d'un système linéaire homogène ou du rang de la matrice $A-\lambda I$. On rappelle à ce sujet que les déterminants de taille supérieure à 2 sont hors programme
Sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.	
Une famille de vecteurs obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.	
b) Diagonalisation des matrices et des endomorphismes	
Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable.	Il est ici commode de rappeler l'identification d'une matrice carrée à un endomorphisme de K^n, évitant les répétitions inutiles.
La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à la dimension de E.	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres égale la dimension de E.	$\rightleftharpoons$ Exemples de calculs de puissances d'une matrice issus de situations itératives en biologie des populations, en probabilités. $\rightleftharpoons$ Application à l'étude de certaines suites apparaissant dans des situations issues des probabilités, des sciences biologiques : suites définies par une récurrence linéaire du type $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ ($a, b \in \mathbf{R}$), ou suites récurrentes linéaires « croisées ».
Toute matrice symétrique réelle de taille inférieure ou égale à 4 est diagonalisable, la matrice de passage P vérifiant $P^{-1} = {}^tP$.	Résultat admis. On met en valeur les relations matricielles ${}^tPAP = D$ et ${}^tPP = I$. Le cas échéant, on observera que la base diagonalisante est orthonormée.

Consolidation 3 – Fonctions et dérivées

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 1, Analyse 2, Analyse 5, Analyse 6).

Analyse 8 – Dérivation et développements limités

Ce chapitre élargit certains concepts vus en première année en introduisant les dérivées n-èmes et les développements limités à l'ordre n.

Les exercices de calcul de développements limités ont pour objet de faciliter l'assimilation des propriétés fondamentales et ne doivent pas être orientés vers la virtuosité calculatoire : sur les exemples numériques, on évitera tout développement limité au-delà de l'ordre 3.

Contenus	Commentaires
a) Limites de fonctions et équivalents	
Fonctions équivalentes en un point ou à l'infini, notation $f \underset{a}{\sim} g$.	On se limite aux fonctions ne s'annulant pas sur un intervalle de la forme $]a, b[$ ou $]b, a[$. On ne formalise pas la notion de voisinage, on s'en tient à son interprétation intuitive.
Symétrie. Transitivité. L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	Le développement reste modeste et se limite aux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage du point de référence.
Si la suite (u_n) tend vers a, et deux fonctions f et g sont définies et équivalentes au voisinage de a alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.	
Si $u(x) \to b$ lorsque $x \to a$ et si $f \sim_b g$ alors $f \circ u \sim_a g \circ u$.	

Contenus (suite)	Commentaires
Équivalents en 0 des fonctions $x \mapsto \exp(x)-1$, $x \mapsto \ln(1+x)$, sin, $x \mapsto 1-\cos(x)$ et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}-1$.	
b) Dérivées n-ièmes	
Fonction n fois dérivable en un point ou sur un intervalle, dérivée n-ième d'une fonction.	On peut revoir à cette occasion plusieurs études de fonctions. La formule de Leibniz est hors-programme. $\rightleftharpoons$ Lien avec la cinématique du point matériel : vitesse, accélération.
Fonction de classe $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^{\infty}$.	
c) Développements limités au voisinage de 0.	
Définition de la notation $o(x^n)$ pour désigner des fonctions négligeables devant la fonction $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbf{Z}$ et au voisinage de 0 ou de l'infini.	On se ramène, aussi souvent que nécessaire, à la limite d'un quotient.
Définition des développements limités en 0.	Les problèmes de développement limité en un réel non nul ou en $\pm\infty$ sont ramenés en 0. L'étude des développements asymptotiques ne sont pas un attendu du programme.
Interprétation des développements limités d'ordre 1 et 2 (ou plus si nécessaire) en termes de position relative entre tangente et courbe.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit.	L'obtention d'un développement limité pour une fonction composée est présentée et exercée sur des exemples simples, comme $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
Primitivation d'un développement limité.	
Développements limités de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et exp.	Le second est obtenu par primitivation et le troisième par primitivations successives.
Formule de Taylor-Young : existence d'un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	La formule de Taylor-Young peut être admise, ou obtenue par primitivations successives dans le cadre d'une récurrence.
Développements limités usuels au voisinage de zéro des fonctions : cos, sin et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ où α est un réel.	

Consolidation 4 – Équations différentielles linéaires

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 3).

Analyse 9 – Équations différentielles

Ce chapitre consolide les équations différentielles vues en TB1, et présente deux exemples d'équations différentielles non linéaires autonomes.

Contenus	Commentaires
Exemple d'étude de l'équation différentielle non linéaire autonome : $y' + ky^2 = 0$.	On montre comment obtenir une expression des solutions sans se poser la question d'éventuelles annulations. La définition des équations autonomes est hors programme. Le changement de fonction inconnue peut être envisagé en cours, mais n'est pas un attendu du programme. $\rightleftharpoons$ Réactions d'ordre 2 en cinétique chimique (on met en valeur, dans ce contexte particulier, la notion de conditions initiales).

Contenus (suite)	Commentaires
Exemple d'étude de l'équation logistique $y' = y(1-y)$ dans le seul cas où $0 < y < 1$.	On pourra introduire la fonction auxiliaire $z = \frac{1}{y}$. $\rightleftharpoons$ Ce modèle (dit logistique normalisé) trouve sa source en dynamique des populations. Discussion des stratégies r et K. $\rightleftharpoons$ Méthode d'Euler pour les équations différentielles.

Consolidation 5 – Suites réelles

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 4).

Probabilités 4 – Concepts de base des probabilités

Ce chapitre a pour but de développer les variables aléatoires réelles vues en première année, et de compléter et consolider les techniques du calcul des probabilités vues en première année.

On ne soulèvera aucune difficulté théorique sur les notions introduites dans cette partie du programme où un bon nombre de résultats seront admis.

Les séries à termes positifs sont exclusivement introduites en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques les séries ne pourront intervenir que dans le cadre probabiliste.

Les séries considérées seront à termes positifs.

Contenus	Commentaires
a) Séries à termes positifs	
Définition, terme général, somme, somme partielle d'ordre n.	
Convergence et divergence d'une série.	On convient d'utiliser le symbole $\sum u_n$ pour désigner la série (sans préjuger de sa convergnce)
La somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ est définie comme la limite, finie ou infinie, de la suite des sommes partielles. On a l'alternative : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$ ou $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$.	Le symbole $+\infty$ ne peut être manipulé que dans le cadre des sommes de séries à termes positifs. Les règles de calcul sont déduites des propriétés des limites de suites (vues en première année).
Propriétés de linéarité de la somme. Relations sur les sommes $\sum u_n + v_n = \sum(u_n + v_n)$ et $\sum \lambda u_n = \lambda \sum u_n$ pour $\lambda > 0$.	On relie les identités : $(+\infty) + a = +\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $\lambda.(+\infty) = +\infty$ (pour $\lambda > 0$) avec les théorèmes correspondants sur les limites de suites.
Convergence et somme des séries géométriques et des séries de terme général nq^{n-1} (avec $0 < q < 1$) ; convergence des séries $n(n-1)q^{n-2}$ pour $0 < q < 1$, $\sum \frac{x^k}{k!}$ pour $x > 0$.	On admet la formule $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
Convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum \frac{1}{n}$.	L'étude générale des séries de Riemann est hors programme.
Thèorèmes de convergence pour deux séries à termes positifs u_n et v_n : • théorème de comparaison si $u_n \leq v_n$, • si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	Tout autre critère de convergence est hors programme. Dans le premier cas, on majorera la somme de la série de gauche par celle de la série de droite si convergence il y a, et on envisagera la situation où la série de gauche diverge. Les résultats relatifs aux restes et sommes partielles sont hors programme.
b) Généralités sur les probabilités	

Contenus (suite)	Commentaires
Extension des définitions données en première année au cas où l'univers est un ensemble infini.	On pourra signaler les problèmes qui peuvent survenir pour la définition de la probabilité d'une partie quelconque de l'univers mais la notion de tribu et les résultats sur la probabilité d'une réunion (respectivement une intersection) croissante (respectivement décroissante) d'événements sont hors programme.
Pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles, expression de $P(\bigcup A_n)$.	
Révision et extension à ce nouveau cadre des résultats de première année sur les probabilités et sur les probabilités conditionnelles.	

Probabilités 5 – Variables aléatoires discrètes positives

Contenus	Commentaires
a) Définitions	
On étendra la définition vue en première année au cas où l'ensemble des valeurs prises est contenu dans l'ensemble des entiers positifs.	On indiquera que la limitation portant sur le signe pourra être levée, dans un cadre théorique plus vaste, une fois en école d'ingénieur ou en L3.
Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.	Diagramme en bâtons.
Fonction de répartition. Croissance et limite en $+\infty$.	Représentation graphique.
Détermination de la loi de la variable aléatoire à partir de la fonction de répartition.	Rien n'est exigible concernant la loi du maximum ou du minimum de deux variables aléatoires.
b) Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire discrète positive.	
Théorème de transfert : expression de l'espérance de $u(X)$, où $u(X)$ est elle aussi une variable aléatoire discrète positive.	Ce résultat est admis.
Linéarité de l'espérance : $E(X+\lambda Y) = E(X)+\lambda E(Y)$	Résultat admis et limité au cas où $X+\lambda Y$, X et Y sont des variables aléatoires discrètes positives qui possèdent une espérance.
Variance et écart-type.	La formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ doit être connue.
c) Expériences et variables aléatoires indépendantes	
Expression de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes dont on connait les lois.	L'indépendance mutuelle de plus de deux variables aléatoires peut être mentionnée mais n'est pas un attendu du programme.
Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.	Résultat admis.
Variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.	
d) Lois classiques	
Présentation des lois classiques : — loi certaine, — loi uniforme discrète, — loi de Bernoulli, — loi de Poisson.	Exception faite de la loi de Poisson, les étudiants devront savoir reconnaître les situations classiques de modélisation pour ces lois. L'espérance et la variance des lois certaine, de Bernoulli et de Poisson doivent être connues, ainsi que l'espérance de la loi uniforme.
e) Schéma de Bernoulli et conséquences	
Formalisme du schéma de Bernoulli.	

Contenus (suite)	Commentaires
Présentation des lois suivantes dans le cadre d'un schéma de Bernoulli : — loi binomiale, — loi géométrique.	Les étudiants devront savoir reconnaître les situations classiques de modélisation pour ces lois. L'espérance et la variance de ces lois doivent être connues. La loi hypergéométrique ne constitue pas un attendu du programme.
Somme de deux variables binomiales indépendantes de même paramètre réel p.	

Consolidation 6 – Primitives et intégrales

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 7).

Probabilités 6 –Variables aléatoires à densité

L'intégrale généralisée (ou impropre) est exclusivement introduite en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques les intégrales généralisées et de fonctions continues par morceaux ne pourront intervenir que dans un cadre probabiliste.

Contenus	Commentaires
a) Fonctions continues par morceaux	
Définition d'une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.	Les fonctions considérées n'ont qu'un nombre fini de discontinuités (et admettent des limites finies à droite et à gauche en tout point).
Généralisation de la notion d'intégrale aux fonctions continues par morceaux.	On évitera les développements théoriques pour se consacrer aux calculs pratiques.
Propriétés.	On pourra admettre la plus grande partie des adaptations aux fonctions continues par morceaux des résultats mis en place pour les fonctions continues.
Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et soit a un réel, étude des propriétés de la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$. Croissance dans le cas où f est positive, continuité et dérivabilité.	Résultats admis.
b) Définition de l'intégrale généralisée (ou impropre) en une borne infinie	
Théorème de la limite monotone pour les fonctions.	
Définition de l'intégrale d'une fonction positive continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, sur un intervalle de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$. Convergence et divergence.	On souligne l'importance du théorème de la limite monotone pour démontrer une convergence. On convient que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (resp. $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$, $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$), ou bien est fini, ou bien vaut $+\infty$. Interprétation de ces quantités en termes d'aire.
Utilisation d'une primitive.	L'exemple fourni par les intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est choisi comme illustration, en particulier pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.
L'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.	Résultat admis.
c) Propriétés	
Relation de Chasles. Linéarité.	
Adaptation de la formule d'intégration par parties.	On souligne la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.

Contenus (suite)	Commentaires
Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales généralisées.	Si la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant les limites $\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β, alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ convergent ou divergent simultanément, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.
Théorèmes de convergence pour deux fonctions positives f et g : • théorème par comparaison si $f \leq g$, • si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors les intégrales généralisées en b $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.	Résultats admis. Tout autre critère de convergence est hors programme. b désigne ici une borne infinie.
d) Généralités sur les variables aléatoires positives à densité	
Densité de probabilité. Une fonction de densité est une fonction définie sur **R**, continue par morceaux, positive, dont l'intégrale généralisée converge et vaut 1.	
Variable aléatoire positive admettant une densité.	On indiquera que la limitation portant sur le signe pourra être levée, dans un cadre théorique plus vaste, une fois en école d'ingénieur ou en L3.
Fonction de répartition : expression sous la forme d'une intégrale, croissance, limite en $+\infty$.	
Indépendance de deux variables aléatoires à densité.	L'indépendance de X et Y est exprimée par rapport aux événements $(X \in I)$ et $(Y \in J)$, où I et J sont des intervalles.
Sur des exemples simples, recherche de la loi de la variable positive $Y = u(X)$, X ayant une densité connue et u étant une fonction usuelle.	On peut prendre comme exemples $Y = X^2$, $Y = aX + b$, etc. Démontrer qu'une variable admet une densité n'est pas un objectif du programme.
Espérance, variance et écart-type de variables aléatoires positives à densité.	On fait une analogie avec le cas discret.
Formule de König-Huygens.	Résultat admis par analogie avec le cas discret.
Théorème de transfert pour le calcul de l'espérance de $u(X)$, où u est une fonction usuelle.	Ce résultat est admis.
e) Lois classiques	
Étude des lois classiques : loi uniforme, loi exponentielle, loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.	Transformation pour se ramener à la loi normale centrée réduite. La propriété d'invariance temporelle de la loi exponentielle n'est pas un attendu du programme. $\rightleftharpoons$ Simulation des lois uniforme, exponentielle, normale. $\rightleftharpoons$ Exemples de phénomènes naturels pouvant être modélisés par des lois uniformes, exponentielles, normales.
Espérances de ces lois.	L'espérance d'une variable aléatoire uniforme et l'espérance d'une variable suivant une loi normale peuvent faire apparaître des intégrales de fonctions non positive ; on leur donne un sens au moyen de découpages. Les espérances des lois mentionnées doivent être connues.

Probabilités 7 – Couples de variables aléatoires discrètes

On se limite ici aux couples de variables aléatoires dont l'une des variables au moins est finie et prend au plus quatre valeurs.

Contenus	Commentaires
Notation (X,Y).	
Loi conjointe, lois marginales.	La loi de la somme de deux variables aléatoires n'est pas un attendu du programme.
Lois marginales. Lois conditionnelles.	Interprétation de la notion d'indépendance.
Définition de la covariance, formule de König-Huygens $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.	La loi du produit de deux variables aléatoires n'est pas un attendu du programme.
Variance de $X+Y$.	On remarquera qu'en cas d'indépendance, $\text{Cov}(X,Y) = 0$, mais que la réciproque peut être fausse.

Probabilités 8 – Comportements asymptotiques et prise de décision

Ce chapitre met en place un contexte d'étude de phénomènes limites, amenant à l'étude en situation de quelques résultats simples de statistique inférentielle ; les liens avec les autres chapitres sont évidemment à souligner.

Contenus	Commentaires
a) Comportements asymptotiques	
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour des variables aléatoires positives.	
Loi faible des grands nombres.	
Théorème central limite : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2, alors pour de grandes valeurs de n, la moyenne empirique centrée réduite suit approximativement une loi normale centrée réduite.	Théorème admis. La moyenne empirique centrée réduite est définie par $M_n^* = \frac{M_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, où M_n est la moyenne empirique définie par $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Cas de la loi binomiale : théorème de Moivre-Laplace.	Aucune propriété de M_n n'est exigible. $\rightleftharpoons$ On illustre numériquement cette approximation.
b) Introduction aux tests	
Test de conformité à la moyenne.	On traitera le cas particulier d'une proportion par majoration de l'écart-type. Les notions de risque α et β, de puissance, ne sont pas au programme. $\rightleftharpoons$ En lien avec l'informatique, mécanisme et simulation de tests statistiques.

Consolidation 7 – Calculs de dérivées partielles

Exercices et situations illustrant le programme de première année.

Analyse 10 – Notions sur les fonctions réelles de plusieurs variables réelles

Ce chapitre, déjà abordé sous le seul angle de la dérivation partielle en première année, met en place, très simplement, le vocabulaire et la problématique des fonctions de plusieurs variables. En Mathématiques, on se limite aux fonctions de deux variables (suffisamment lisses) tout en faisant observer qu'il n'y a pas plus de difficulté à aborder des phénomènes à trois variables.

Contenus	Commentaires
a) Notion de fonction de plusieurs variables et de dérivées partielles	
Définition d'une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.	

Contenus (suite)	Commentaires
Fonction partielle par rapport à une variable. Dérivée partielle par rapport à une variable	$\rightleftharpoons$ Notion de coupe sur un milieu (tissu vivant, terrain). Les règles de dérivation en chaîne ne sont pas au programme.
b) Extrémums d'une fonction de plusieurs variables définie sur $\mathbf{R}^2$ Notion d'extrémum local. Notion de point critique. Un point où une fonction f présente un extremum local et admet des dérivées partielles est critique.	 La localité de l'extrémum est exprimée à l'aide des rectangles.